

TAMPRIŲJŲ IR PLASTINIŲ GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ RĖMŲ SKAIČIAVIMAS

Liudas Liepa¹, Romanas Karkauskas²

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

El. paštas: ¹liudas.liepa@dok.vgtu.lt; ²romas.karkauskas@vgtu.lt

Santrauka. Straipsnyje plėtojamas tampriosios plastinės rėminės konstrukcijos optimizacijos ir analizės uždavinių sprendimo algoritmas, įvertinant geometrinį netiesiškumą. Konstrukcija diskretizuojama baigtiniais strypiniais elementais, kurie yra tempiami arba gniuždomi ir kartu lenkiami. Pateikiamas tokios konstrukcijos elementų tangentinės standumo matricos sudarymo algoritmas, pritaikius matematinio programavimo paketo *MatLab* simbolinius skaičiavimus. Atliktas pasirinktos konfigūracijos rėminės konstrukcijos skaitinis eksperimentas. Netiesinės tamprios analizės rezultatai gauti taikant iteracinę apkrovos kontrolės Newtono ir Raphsono metodą. Nustatytas minimalus tūris konstrukcijos, kuri dar nėra pasiekusi visiško plastiškojo suirimo, tačiau atskiri jos elementai jau deformuojasi plastiškai. Sudaryta konstrukcijos plastiškojo deformavimosi trajektorija.

Reikšminiai žodžiai: optimizacija, analizė, geometrinis netiesiškumas, plastinis lankstas, Newtono ir Raphsono metodas.

Įvadas

Rėminės konstrukcijos elgsena priklauso nuo daugelio veiksnių, tačiau jų visų negalime įvertinti statybinės mechanikos tiesinės teorijos metodais, nes konstrukcijos matmenys ir geometrija deformavimosi metu kinta. Dėl didelių poslinkių ir deformacijų atsiradimo konstrukcijoje negalioja mažų poslinkių principas. Todėl pereinama prie sudėtingesnių, tačiau išsamesnių netiesinės teorijos apibendrinimų. Formuluojuojant analizės uždavinius reikia atsakyti skaičiavimo pagal nedeformuotą konstrukcijos būvį ir įvertinti geometrijos kitimo įtaką konstrukcijos įtempių ir deformacijų būviui bei atsižvelgti į konstrukcijoje atsirandančias plastines deformacijas (Čyras *et al.* 2004).

Sprendžiant konstrukcijų analizės ir optimizacijos uždavinius siekiama sukurti optimalią konstrukciją, kurios masė ir energijos sąnaudos būtų tiesiogiai susijusios, o konstrukcijos elgsena, priklausanti nuo įvairių išorinių veiksnių, atitiktų saugos ir tinkamumo ribinių būvių projektinius reikalavimus (Atkočiūnas, Karkauskas 2010).

Įvertinant medžiagos plastiškąsias savybes, galima spręsti apie plastinių deformacijų įtaką konstrukcijai, o žinant plastinių lankstų atsivėrimo konstrukcijoje seką, galima prognozuoti tolesnę konstrukcijos elgseną, priklausomai nuo apkrovimo varianto. Tai leidžia daug tiksliau sudaryti galimus konstrukcijos irimo modelius ir numatyti priemones tam išvengti dar prieš konstrukcijos naudojimą ir jos metu.

Šių tyrinėjimų tikslai:

- Tangentinės standumo matricos tempiamam arba gniuždomam ir kartu lenkiamam elementui suda-

rymo metodikos analizė ir skaitinių išraiškų formavimas *MatLab* aplinkoje;

- Plėtoti plokščių rėminių konstrukcijų įtempių deformacijų būvio analizės uždavinio skaičiavimo algoritmą, įvertinant deformuojamos konstrukcijos geometrijos netiesiškumą ir plieno plastiškąsias savybes;
- Atlikti pasirinktos konfigūracijos geometriškai netiesinės rėminės konstrukcijos optimizacijos ir analizės skaitinį eksperimentą;
- Nustatyti plastinio deformavimo trajektoriją.

Tangentinė standumo matrica

Geometriškai netiesinės konstrukcijos būvį apibūdinančios deformacijų ir poslinkių priklausomybės turi netiesinių narių. Todėl norint gauti tampraus atsako dydžius, t. y. tampriąsias įrašas ir tampriuosius poslinkius, reikia spręsti tokią netiesinę lygtį (Karkauskas, Popov 2009):

$$[K_{\tau}]\mathbf{u}_e = \mathbf{F}, \quad (1)$$

čia: $[K_{\tau}]$ – visos konstrukcijos globalioji tangentinė standumo matrica; \mathbf{u}_e – konstrukcijos globaliųjų poslinkių vektorius; \mathbf{F} – apkrovos vektorius.

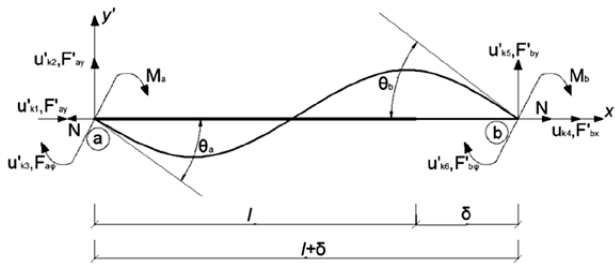
Baigtinių elementų metodo tangentinei standumo matricai sudaryti taikome pilnutinės diskretizuoto kūno potencinės energijos stacionarumo sąlygą (Atkočiūnas, Nagevičius 2004; Barauskas *et al.* 2004), t. y. pirmąją funk-

cionalo išvestinę prilyginame nuliui. Žinome, kad pilnutinė potencinė energija susideda iš vidinių jėgų potencialo ir išorinių jėgų potencialo. Iš čia varijuodami gauname, kad baigtinio elemento vidinių jėgų vektoriaus $\Psi_k(\mathbf{u}_k)$ pirmosios eilės variacija elemento mazginiais poslinkiais \mathbf{u}'_k ir yra baigtinio elemento tangentinė standumo matrica (Karkauskas, Popov 2009):

$$\frac{\partial \Psi_k(\mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{u}'_k} = [k_\tau(\mathbf{u}'_k)], \quad (2)$$

čia: $\Psi_k(\mathbf{u}_k)$ – vidinių jėgų vektorius; \mathbf{u}'_k – elemento mazginių poslinkių vektorius.

Nagrinėjamas plokščiosios rėminės konstrukcijos elementas lokaloje $x'0y'$ koordinačių sistemoje pavaizduotas 1 paveiksle. Rėmui deformuojantis šio elemento taškai gali pasislinkti atstumais, daug didesniais už paties elemento matmenis. Teigiame, kad elemento forma nekinta, t. y. deformacijos išlieka nedidelės. Elementas yra tempiamas arba gniuždomas ir kartu lenkiamas.



1 pav. Elementas lokaloje koordinačių sistemoje
Fig. 1. An element in the local coordinate system

Jo įrašos aprašomos vektoriumi

$$\mathbf{S}_{ab} = [M_a M_b N]^T,$$

mazginės jėgos vektoriumi

$$\mathbf{F}'_k = [F'_{ax} F'_{ay} F'_{ap} F'_{bx} F'_{by} F'_{bp}]^T,$$

o mazginiai poslinkiai vektoriumi

$$\mathbf{u}'_k = [u'_{k1} u'_{k2} u'_{k3} u'_{k4} u'_{k5} u'_{k6}]^T.$$

Poslinkių vektoriaus komponentai u'_{k1} , u'_{k2} , u'_{k4} , u'_{k5} yra elemento mazginių taškų linijiniai poslinkiai, kurių teigiamos kryptys sutampa su elemento lokaliųjų ašių x' ir y' kryptimis, o komponentai u'_{k3} ir u'_{k6} yra mazginių taškų kampiniai posūkiai, kurių teigiamos kryptys sutampa su laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi. Taigi, toks elementas lokaloje koordinačių sistemoje turi šešis laisvės laipsnius.

Šio elemento bet kurio taško linijinis poslinkis x' ašies kryptimi (pailgėjimas ar sutrumpėjimas) aprašomas tiesine funkcija

$$u'_{kx}(x) = a_{0k} + a_{1k} \cdot x, \quad (3)$$

o linijinis poslinkis ašiai x' statmena kryptimi y' – netiesine funkcija

$$u'_{ky}(x) = a_{2k} + a_{3k} \cdot x + a_{4k} \cdot x^2 + a_{5k} \cdot x^3. \quad (4)$$

Tuomet kampinis poslinkis yra toks:

$$\phi'_k(x) = -\frac{\partial u'_{ky}(x)}{\partial x} = -(a_{3k} + 2a_{4k} \cdot x + 3a_{5k} \cdot x^2). \quad (5)$$

Funkcijoms $u'_{kx}(x)$ ir $u'_{ky}(x)$ aproksimuoti dažniausiai naudojami Hermito daugianariai. Jų nežinant bet kurio taško linijiniams poslinkiams interpoliuoti per elemento mazginius taškus Hermito daugianarius galima gauti interpoliacines funkcijas parenkant tam tikro daugianario pavidalu (Karkauskas, Popov 2009).

Taigi elemento bet kurio taško linijinių poslinkių vektorius yra toks:

$$\mathbf{u}_k(x) = [u'_{kx}(x) u'_{ky}(x)]^T. \quad (6)$$

Šis vektorius elemento mazginiais poslinkiais išreiškiamas per elemento formos funkcijų matricą taip:

$$\mathbf{u}_k(x) = [N_k(x)] \cdot \mathbf{u}'_k, \quad (7)$$

čia $[N_k(x)]$ yra elemento formos funkcijų matrica (Karkauskas, Popov 2009).

Pritaikę formos funkcijas ir atlikę matematinius pertvarkymus, gauname, kad baigtinio elemento tangentinė standumo matrica (2) lokaloje koordinačių sistemoje yra išreiškiamas, kaip trijų matricių suma (Karkauskas, Popov 2009):

$$[k'_\tau] = [k'_e] + [k'_g] + [k'_u]. \quad (8)$$

Čia elemento mažų poslinkių standumo matrica lokaloje koordinačių sistemoje

$$[k'_e] = E \cdot A \int_0^l [C_0]^T \cdot [C_0] dx + E \cdot I \int_0^l [C_2(x)]^T \cdot [C_2(x)] dx, \quad (9)$$

elemento geometrinė standumo matrica lokaloje koordinačių sistemoje

$$[k'_g] = A \int_0^l [C_3(x)] \cdot \sigma_k(x) dx, \quad (10)$$

kai įtemptai elemente išreikšti per mazginius elemento poslinkius \mathbf{u}'_k :

$$\sigma_k(x) = E \cdot [C_0] \cdot \mathbf{u}'_k + \frac{1}{2} \cdot E \cdot \mathbf{u}'_k{}^T \cdot [C_3(x)] \cdot \mathbf{u}'_k. \quad (11)$$

Elemento pradinių poslinkių standumo matrica lokaliajoje koordinacinių sistemoje

$$\begin{aligned}
 [k'_u] &= E \cdot A \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot \mathbf{u}'_k \cdot [C_0] dx + \\
 &E \cdot A \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot \mathbf{u}'_k \cdot \mathbf{u}'_k{}^T \cdot [C_3(x)] dx + \\
 &E \cdot A \int_0^l [C_0]^T \cdot \mathbf{u}'_k{}^T \cdot [C_3(x)] dx. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Šiose priklausomybėse taikomos koeficientų matricos $[C_0]$, $[C_2(x)]$ ir $[C_3(x)] = [C_1(x)]^T \cdot [C_1(x)]$, kurios yra gaunamos diferencijuojant elemento formos funkcijų matricos $[N_k(x)]$ atitinkamą eilutę:

$$\begin{aligned}
 [C_0] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [C_1(x)] &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} & -1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} & 0 \\ \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} & \frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} & & \end{bmatrix}, \\
 [C_2(x)] &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6x}{l^2} + \frac{12x}{l^3} & \frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} & 0 \\ \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & \frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} & & \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Elemento tangentinės standumo matricos $[k'_\tau]$ sudedamąsias matricas $[k'_e]$, $[k'_g]$ ir $[k'_u]$, ir joms sudaryti reikalingas koeficientų matricas galima gauti taikant simbolinius skaičiavimus *MatLab* programinio paketo aplinkoje.

Pirmiausia *MatLab* aplinkoje sudaromas algoritmas koeficientų matricoms $[C_0]$, $[C_1(x)]$, $[C_2(x)]$ ir $[C_3(x)]$ skaičiuoti:

```

% 1.Koeficientų matricų formavimas.
Syms L x
%1.1.Užrašomi elemento formos funkcijų matri-
cos nariai Hermito polinomiali (Karkauskas R. Po-
pov M. 2009).
N1=1-x/L;
N2=1-(3*x^2)/L^2+(2*x^3)/L^3;
N3=-x+(2*x^2)/L-(1*x^3)/L^2;
N4=x/L;
N5=(3*x^2)/L^2-(2*x^3)/L^3;
N6=(1*x^2)/L-(1*x^3)/L^2;
% 1.2.Formuojama elemento formos funkcijų ma-
trica.
Nk=[N1 0 0 N4 0 0;...
    0 N2 N3 0 N5 N6];
% 1.3.Koeficientų matricos, gaunamos diferencii-
juojant atitinkamas Nk eilutes.
C1=diff(Nk(2,1:6),x);
C2=diff(C1);

```

Formuojamas algoritmas $[k'_e]$ matricai gauti:

```

% 2.Elemento mažų poslinkių standumo matrica.
Syms E A I
ke(1:6,1:6)=zeros;
ke1=int(C0t*C0,x,0,L);
ke2=int(C2t*C2,x,0,L);
ke=E*A*ke1+E*I*ke2;

```

Algoritmas $[k'_g]$ matricai gauti:

```

% 3.Elemento geometrinė standumo matrica.
Syms u1 u2 u3 u4 u5 u6
uk=[u1;u2;u3;u4;u5;u6]; %čia uk - elemen-
to mazginių poslinkių vektorius lokaliajoje
koordinacinių sistemoje.
ukt=uk.';
sigma1=C0*uk;
sigma2=ukt*C3*uk;
sg=E*sigma1+0.5*E*sigma2;
kg=A*int(C3*sg,x,0,L);

```

Algoritmas $[k'_u]$ matricai gauti:

```

% 4.Elemento pradinių poslinkių standumo ma-
trica.
ku(1:6,1:6)=zeros;
Ku1=int(C3t*uk*C0,x,0,L);
Ku2=int(C3t*uk*ukt*C3,x,0,L);
Ku3=int(C0t*ukt*C3,x,0,L);
ku=E*A*(Ku1+Ku2+Ku3);

```

Tangentinės standumo matricos formuojamos kiekvienam elementui atskirai lokaliajoje koordinacinių sistemoje. Iš lokaliųjų komponentų elemento tangentinė standumo matrica transformuojama į globaliuosius. Tam reikia sudaryti elemento krypties transformacijos matricą $[T'_{ab}]$ (Dulmanas, Karkauskas 1992). Tuomet elemento tangentinė standumo matrica globaliojoje koordinacinių sistemoje yra tokia:

$$[k_\tau] = [T'_{ab}]^T \cdot [k'_\tau] \cdot [T_{ab}]. \quad (13)$$

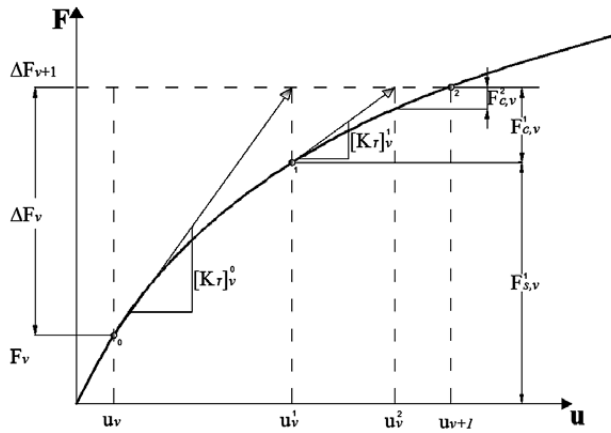
Jas sujungus gaunama netiesinės lygties (1) globalioji tangentinė standumo matrica $[K_\tau]$.

Tangentinio standumo metodo realizacija

Sistema (1) yra netiesinių lygčių sistema. Tokia sistema sprendžiama taikant iteracinę apkrovos kontrolės Newtono ir Raphsono metodą. Jo principinė schema pavaizduota 2 paveiksle.

Taikant šį metodą, apkrovos vektorius \mathbf{F} skaidomas į dalis ir kiekvieno žingsnio metu didinamas tam tikru prieaugiu $\Delta \mathbf{F}_v$. Kiekvienu apkrovos prieaugio didinimo žingsniu atliekamos iteracijos siekiant eliminuoti nesubalansuotas jėgas $\mathbf{F}_{c,v}^i$. Nesubalansuotos jėgos atsiranda dėl disbalanso tarp mazgo vidinių ir išorinių jėgų:

$$\mathbf{F}_{c,v}^i = \mathbf{F}_{v+1} - \mathbf{F}_{s,v}^i, \quad (14)$$



2 pav. Newtono ir Raphsono metodas
Fig. 2. The Newton – Raphson method

čia: $F_{c,v}^i$ – nesubalansuotų mazginių jėgų vektorius v -ojo žingsnio i -osios iteracijos gale; F_{v+1} – mazgo išorinių jėgų vektorius v -ojo žingsnio gale; $F_{s,v}^i$ – mazginių vidinių jėgų vektorius v -ojo žingsnio i -osios iteracijos gale.

Šios paklaidos (nesubalansuotos mazginės jėgos) atsiranda ištiesinant uždavinį, t. y. standumo matrica formuojama naudojant prieš tai buvusios iteracijos metu nustatytas mazgų poslinkių reikšmes.

Optimizacijos įvertinant geometrinį netiesiškumą matematinis modelis

Konstruksijai deformuojantis plastiškai, optimizacijos uždavinys formuluojamas taip: žinant rėmo konfiguraciją ir išorinės apkrovos pridėjimo vietą ir dydį, reikia rasti strypų skerspjūvių plotų A (ribinių įrašų) pasiskirstymą, atitinkantį priimtą optimalumo kriterijų (pvz., minimalų konstrukcijos tūrį).

Uždavinio apribojimų sąlygos turi apibūdinti konstrukcijos tikrąjį įtempių ir deformacijų būvį (IDB), kai atskiruose jos elementuose atsiranda plastinių deformacijų, tačiau konstrukcija dar plastiškai nesuyra. Taikant ekstreminį energijos sklaidos minimumo principą ir matematinio programavimo teoriją, rėminės konstrukcijos optimizacijos uždavinio matematinis modelis yra toks (Atkočiūnas, Karkauskas 2010):

$$\begin{aligned} & \text{rasti } \mathbf{L}^T \mathbf{S}_0 \rightarrow \min \\ & \text{kai } [\Gamma] \mathbf{S}_0 - [\Phi_c] \mathbf{S}_r \geq [\Phi_c] \mathbf{S}_e, \\ & [A_n] \mathbf{S}_r = \mathbf{F} - [A_n] \mathbf{S}_e, \\ & \mathbf{S}_0 \geq \mathbf{S}_0^{\min}, \end{aligned} \quad (15)$$

čia: \mathbf{L} – tikslo funkcijos koeficientų vektorius (konstrukcijos strypų, su tuo pačiu ribinės įrašos dydžiu, suminių ilgių vek-

torius); \mathbf{S}_0 – ribinių įrašų vektorius; $[\Gamma]$ – konfiguracijos matrica; $[\Phi_c]$ – takumo sąlygų matrica; \mathbf{S}_r – liekamųjų įrašų vektorius; \mathbf{S}_e – netiesinio skaičiavimo tamprųjų įrašų vektorius; \mathbf{F} – išorinės apkrovos vektorius; $[A_n]$ – netiesinio skaičiavimo pusiausvyros lygčių, įvertinančių geometrijos kitimą, koeficientų prie nežinomųjų matrica; \mathbf{S}_0^{\min} – ribinių įrašų vektorius, rodantis konstrukcinius apribojimus.

Optimizacijos uždavinys yra tiesinio matematinio programavimo uždavinys, kuriam spręsti taikysime anksčiau aptartą Newtono ir Raphsono iteracinį apkrovos kontrolės metodą.

Geometriškai netiesinės analizės uždavinio matematinis modelis

Norint sužinoti optimalios konstrukcijos, nepasiekusios pilnutinio plastiškojo suirimo, tikrąjį įtempių deformacijų būvį, sprendžiamas analizės uždavinys.

Analizės uždavinio formuluotė: nustatyti plastiškai deformuojamos konstrukcijos IDB, kai jos forma, apkrovos pobūdis, dydis ir fizikiniai skerspjūvių ir medžiagos parametrai yra žinomi. Optimalių skerspjūvių parametrai išreiškiami per ribines įrašas \mathbf{S}_0 .

Rėminės konstrukcijos, kurios elementai patiria plastines deformacijas, analizės uždavinio matematinio modelio formuluotė yra tokia (Atkočiūnas, Karkauskas 2010):

$$\begin{aligned} & \text{rasti } \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T \mathbf{D} \mathbf{S}_r \rightarrow \min, \\ & \text{kai } [\Phi_c] \mathbf{S}_r \leq \mathbf{S}_0 - [\Phi_c] \mathbf{S}_e, \\ & [A_n] \mathbf{S}_r = \mathbf{F} - [A_n] \mathbf{S}_e. \end{aligned} \quad (16)$$

Čia tikslo funkcija yra kvadratinė, o apribojimų sąlygos tiesinės. Todėl tai yra iškiliojo kvadratinio matematinio programavimo uždavinys, turintis vieną ekstremumą (Karkauskas 2007). Šis uždavinys sprendžiamas, taikant kvadratinio matematinio programavimo teoriją ir specialius algoritmus. Gaunamos tikrosios įrašos $\mathbf{S} = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_r$, ir tikrieji poslinkiai $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_r$ optimalioje konstrukcijoje, nepasiekusioje visiško plastiškojo suirimo, bet kuriame apkrovimo etape.

Tiek (15), tiek (16) uždavinių stiprumo sąlygose esančių takumo sąlygų matricoms sudaryti taikomos išraiškos, aprašančios j -ojo pjūvio takumo sąlygas, yra tokios:

$$\begin{cases} M_{0j} - |M_j| \geq 0 \\ M_{0j} - \frac{|M_j|}{1,18} - c_j^+ N_j \geq 0, \\ M_{0j} + \frac{|M_j|}{1,18} + c_j^- N_j \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

čia ekscentricitetai c^+ ir c^- apibūdina ryšį tarp ribinio lenkimo momento ir ribinės ašinės jėgos (Karkauskas 2007).

Tempiamiems elementams:

$$c^+ = \frac{M_{0j}}{N_{0j}}, \quad (18)$$

o gniuždomiems elementams:

$$c^- = \frac{M_{0j}}{N_{crj}}, \quad (19)$$

čia N_{crj} – ribinė ašinė jėga išreiškiama taip: $N_{crj} = \chi \sigma_y A$, kur χ – takumo įtempių redukcijos koeficientas, priklausantis nuo sąlyginio gniuždomojo elemento liaunio, nustatomo pagal EC3 nurodymus.

Konstrukcijos, patyrusios plastines deformacijas, optimizacijos ir analizės uždavinių sprendimo algoritmas pavaizduotas 3 paveiksle.

Skaitinis eksperimentas

Aptarti konstrukcijų optimizavimo ir analizės uždavinių matematiniai modeliai atskleidžiami nagrinėjant pasirinktos geometrijos plokščią strypinę sistemą – rėmą. Nagrinėjamos sistemos geometrija bei apkrovimo pobūdis pavaizduoti skaičiuojamojoje schemoje (4 pav., a).

Konstrukcijos elementai projektuojami iš karšto valcavimo dvitėjo formos skerspjūvio profiliuotųjų:

- pirmojo ir antrojo aukšto kolonos iš europinio standarto HEB profiliuotųjų;
- trečiojo aukšto kolonos iš europinio standarto HEAA profiliuotųjų;
- sijos iš europinio standarto IPE profiliuotųjų.

Rėmas projektuojamas su vienodo dydžio ribinėmis įrašomis tam tikroms konstrukcijos grupėms, t. y. M_{01} ribinę įrašą turi pirmojo ir antrojo aukšto kolonos, M_{02} – visos sijos, o M_{03} – trečiojo aukšto kolonos. Ribinių įrašų pasiskirstymas konstrukcijoje pavaizduotas 4 pav., a dalyje.

Konstrukcijos strypų skerspjūvių pradinės geometrinės charakteristikos skaičiuojamos pagal formules (Atkočiūnas, Karkauskas 2010):

$$I_x = a_1 A^{b_1}, \quad (20)$$

$$W_{pl} = a_3 A^{b_3}, \quad (21)$$

čia I_x – skerspjūvio inercijos momentas; W_{pl} – skerspjūvio plastinis atsparumo momentas; A – pradinis skerspjūvio plotas; a_1, a_3, b_1, b_3 – geometrinų charakteristikų koeficientai, kurie pateikti 1 lentelėje.

Plieno takumo riba imama $\sigma_y = 235 \text{ MPa}$, medžiagos tamprumo modulis $E = 205 \text{ GPa}$.

1 lentelė. Profiliuotųjų geometrinų charakteristikų koeficientai

Table 1. The coefficients of geometric characteristics of profiles

Profiliuotųjų tipas	a_1	b_1	a_3	b_3
IPE	0,7885	2,3210	0,8411	1,6572
HEB 100-300	0,2639	2,2917	0,4933	1,6467
HEAA 100-280	0,4947	2,2932	0,6752	1,6472

Rėmo diskretinis modelis pavaizduotas 4 pav., b. Rėmo diskretinį modelį sudaro 12 baigtinių elementų, sujungtų 11-oje mazgų. Diskretinio modelio laisvumo laipsnis yra $m = 30$. Bendras nežinomųjų įrašų skaičius yra $n = 36$, nes kiekvienas elementas turi po du lenkimo momentus ir ašinę jėgą.

Konstrukcinio reikalavimo ribinės įrašos kitimo apatinė riba $S_{0,cr}^{min}$ siejama su ribinio lenkimo momento minimalia reikšme $M_{0,cr}^{min}$. Ją gauname pagal STR 2.05.08:2005 reikalavimus, keliamus ribiniam liauniui λ_{lim} :

$$M_{0,cr}^{min} = \sigma_y a_3 \left(\frac{l_b^2}{a_1 \lambda_{lim}^2} \right)^{\frac{b_3}{b_1-1}}, \quad (22)$$

čia: l_b – elemento klumpamasis ilgis pagal STR 2.05.08:2005.

Ribinis liaunis λ_{lim} atliekant skaičiavimus neribojamas, visiems konstrukcijos elementams imamas $\lambda \leq \lambda_{lim} = 120$.

Rėmo geometriškai netiesinės optimizacijos uždavinio pagal matematinį modelį (15) rezultatai pateikti 2 lentelėje.

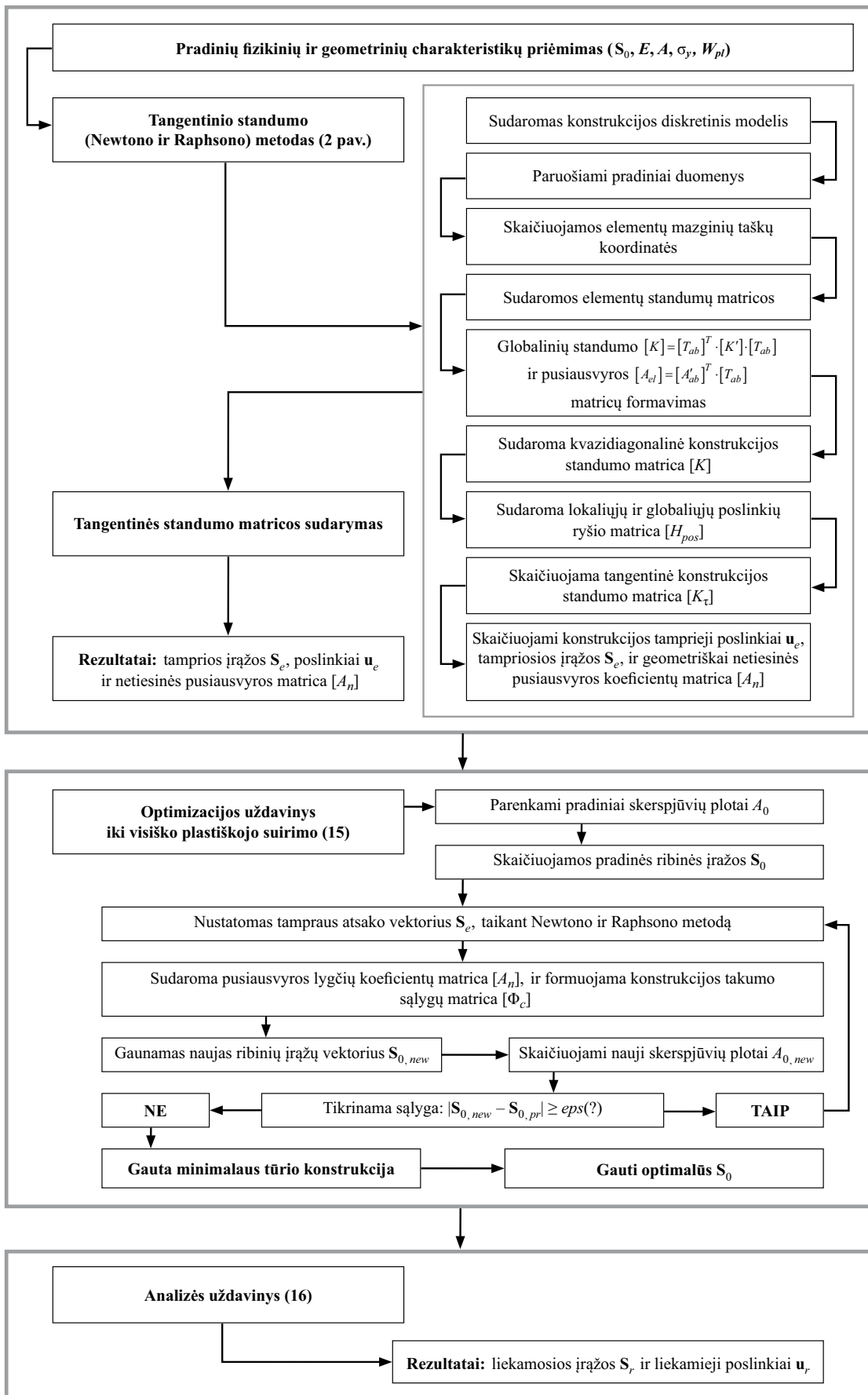
Iteracinio skaičiavimo optimalus sprendinys, atitinkantis pasirinktą tikslumą, gaunamas po 5 optimizacijos iteracijų. 2 lentelės 5-oje eilutėje pateiktos konstrukcijos optimalių skerspjūvių plotų reikšmės ir optimalus konstrukcijos tūris V .

Skaičiavimai yra atlikti *MatLab* aplinkoje, taikant tiesinio uždavinio sprendimo paprogramę *linprog*.

2 lentelė. 3 aukštų rėmo optimalaus tūrio sprendinio kitimas iteracijose

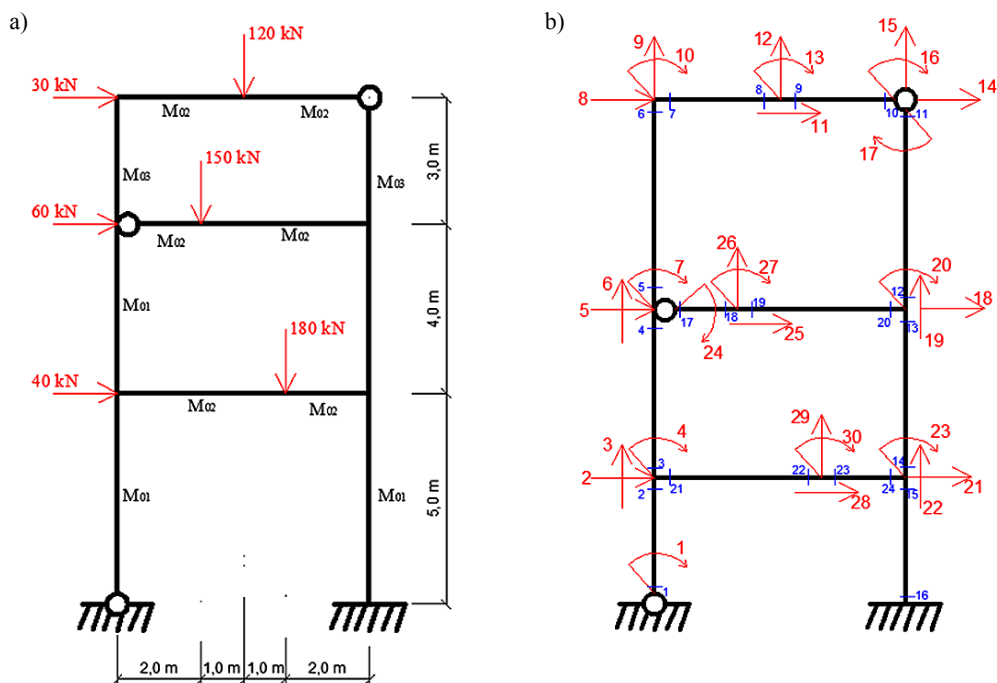
Table 2. Convergence per iterations of the solution to the optimum volume of the 3-storey steel frame

Nr	M_{01} , kNm	M_{02} , kNm	M_{03} , kNm	A_1 , cm ²	A_2 , cm ²	A_3 , cm ²	V , cm ³
0	83,34	145,93	59,41	54,30	53,80	36,50	216 480,00
1	220,61	282,18	60,40	98,06	80,09	36,86	358 103,92
2	232,18	288,42	56,23	101,16	81,15	35,30	348 913,44
3	231,68	287,92	56,23	101,02	81,07	35,30	349 376,16
4	231,68	287,94	56,25	101,03	81,07	35,30	349 359,44
5	231,68	287,94	56,25	101,03	81,07	35,30	349 360,07
6	221,98	258,93	109,19	98,44	76,04	52,81	345 751,50



3 pav. Optimizacijos analizės bendroji uždavinio schema

Fig. 3. Optimization – analysis common task schema



4 pav. 3-ų aukštų rėmo skaičiuojamoji schema (a); diskretinis modelis (b)
 Fig. 4. Computational schema for the 3-storey frame (a); discrete model (b)

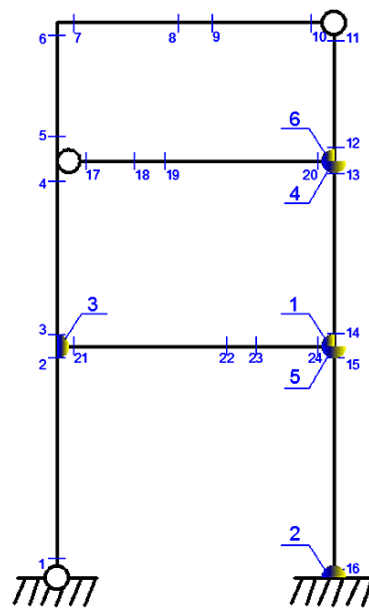
2-osios lentelės 0-ėje eilutėje pateikti pradiniai (parinkti iš sortimento) skerspjūvių plotai, juos atitinkančių pradinių ribinių įrašų reikšmės ir pradinis nedeformuotos konstrukcijos tūris. 5-ojoje eilutėje pateikti optimalaus sprendinio, kai geometrinis netiesiškumas yra įvertinamas, rezultatai – optimalus deformuotos konstrukcijos tūris ir optimalūs skerspjūvių plotai. 6-ojoje eilutėje (žr. 2 lentelę) pateikti optimalūs rezultatai, kai konstrukcijos geometrinis netiesiškumas nėra įvertinamas, ir nedeformuotos tokios konstrukcijos tūris.

Konstrukcijos, nepasiekusios visiško plastiškojo suirimo, analizės uždavinio (16) sprendimas *MatLab* aplinkoje atliktas taikant paprogramę *quadprog*. Šiuo atveju, priklausomai nuo apkrovos dydžio, yra įvertinamas konstrukcijos geometrijos kitimas, plastiškojo deformavimosi metu ir nustatoma plastiškųjų lankstų susidarymo seka.

Išsprendus netiesinės analizės uždavinį, gaunami konstrukcijos tikrieji poslinkiai ir tikrosios įrašos. Didžiausias horizontalus konstrukcijos poslinkis yra $u_8 = 0,43$ m.

Plastinių lankstų susidarymo vietas, konstrukcijoje, nepasiekusioje visiško plastinio suirimo, įvertinant geometrinį netiesiškumą, pavaizduotos 5 paveiksle.

Pilnas rutuliukas vaizduoja tokį mazgą, kuriame jau vyksta plastinis tekėjimas, t. y. deformacijos didėja nedidinant apkrovos. Mazguose, kuriuose plastinės deformacijos yra susiformavusios tik iš dalies, t. y. tik keliuose pjūviuose, toks mazgas dar nėra visiškai plastiškai suiręs.



5 pav. Plastinių deformacijų susidarymo zonos
 Fig. 5. Zones of the concentration of plastic deformations

Abiem atvejais, tiek geometrinio tiesiškumo atveju, tiek geometrinio netiesiškumo atveju, palyginimui pateiktas didžiausio suminio poslinkio u_8 kitimo grafikas (žr. 6 pav.), priklausomai nuo apkrovos faktoriaus (daugiklio). Apkrovos faktorius yra keičiamas nevienodais žingsniais, stebint ir fiksuojant vietą konstrukcijoje, kurioje susidaro plastinis lankstas. Rezultatai pateikti 3 ir 4 lentelėse.

3 lentelė. Geometriškai netiesinės analizės poslinkio priklausomybė nuo apkrovos

Table 3. The dependence of the displacement of geometrically nonlinear analysis on the load

Lanksto Nr.	1	2	3	4	5	6
Apkrovos faktorius	0,703	0,737	0,974	0,978	0,980	0,993
u_g , cm	10,83	12,06	28,98	30,03	31,66	43,00
Lankstas pjūvyje	24	16	21	13	15	20

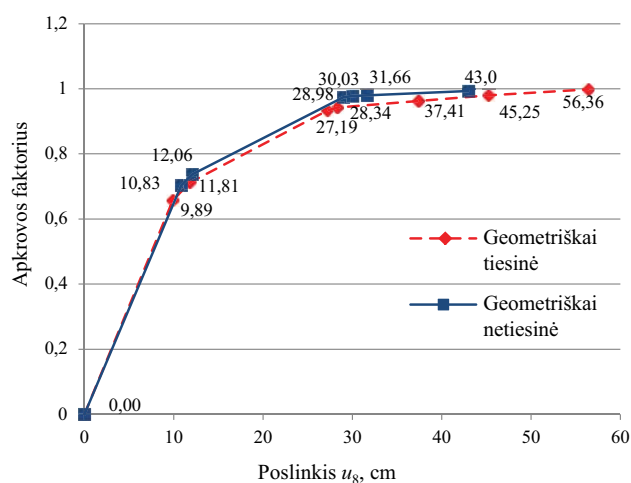
4 lentelė. Palyginimui pateikta geometriškai tiesinės analizės poslinkio priklausomybė nuo apkrovos

Table 4. The dependence of the displacement of geometrically linear analysis on the load

Lanksto Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Apkrovos faktorius	0,657	0,712	0,933	0,942	0,963	0,980	0,998
u_g , cm	9,89	11,81	27,19	28,34	37,41	45,25	56,36
Lankstas pjūvyje	24	16	20	21	15	13	2

Rezultatai grafiškai pavaizduoti 6 pav. diagramoje.

Iš pateiktų rezultatų (3 ir 4 lentelės) matyti, kad įvertinant deformuojamos konstrukcijos geometrinį netiesiškumą, konstrukcija gaunama standesnė, t. y. gaunami santykinai mažesni poslinkiai esant didesnei apkrovai lyginant su rezultatais, kai geometrinis netiesiškumas nėra įvertinamas. Taip pat, įvertinus geometrinį netiesiškumą susidaro vienu plastiniu lankstu mažiau, negu neįvertinus geometrinio netiesiškumo, tačiau abiem atvejais konstrukcija pilnutinai plastiškai nesuyra.



6 pav. Poslinkio kitimo grafikas didėjant apkrovai

Fig. 6. Changes in displacement u_g considering an increase in the load

Išvados

Sudarytas lenkiamo ir kartu tempiamo ar gniuždomo elemento tangentinės standumo matricos formavimo *MatLab* aplinkoje simbolinio skaičiavimo algoritmas, formuojant mažų poslinkių standumo, geometrinę standumo ir pradinį poslinkių standumo matricas. Pateiktos šių matricų analitinės išraiškos.

Sudarytas rėminės konstrukcijos, nepasiekusios visiško plastiškojo suirimo, visas optimizacijos ir analizės uždavinių, įvertinant geometrijos kitimo įtaką, sprendimo algoritmas.

Atliktas skaitinis eksperimentas. Pasirinktai rėminei konstrukcijai rastas optimalus sprendinys, atitinkantis takumo sąlygas ir konstrukcinius apribojimus. Taip pat išspręstas optimalios konstrukcijos analizės uždavinys įvertinant konstrukcijos geometrijos kitimą.

Sudaryta pasirinktos geometrijos rėmo plastiškojo deformavimosi trajektorija.

Skaičiavimo rezultatai palyginti su rezultatais, gautais skaičiuojant, kai geometrinis netiesiškumas nėra įvertinamas.

Literatūra

- Atkočiūnas, J.; Karkauskas, R. 2010. *Tampriųjų plastinių strypinių konstrukcijų optimizavimas*. Vilnius: Technika. 367 p.
- Atkočiūnas, J.; Nagevičius, J. 2004. *Tamprumo teorijos pagrindai*. Vilnius: Technika. 528 p.
- Barauskas, R., et al. 2004. *Baigtinių elementų metodo pagrindai*. Vilnius: Technika. 612 p.
- Čyras, A., et al. 2004. *Standžių plastinių sistemų optimizacijos teorija ir metodai*. Vilnius: Technika. 354 p.
- Dulmanas, V.; Karkauskas, R. 1992. *Tampriųjų strypinių sistemų skaičiavimas baigtinių elementų metodu*. Vilnius: Technika. 92 p.
- Eurokodas 3. Plieninių konstrukcijų projektavimas. 1–1 dalis. Vilnius: Lietuvos standartizacijos departamentas, 2007. 102 p.
- Karkauskas, R.; Popov, M. 2009. Netamprių geometriškai netiesinių plieninių rėminių konstrukcijų skerspjūvių optimizavimo algoritmas, *Statybinės konstrukcijos ir technologijos* [Engineering Structures and Technologies] 1(1): 10–22.
- Karkauskas, R. 2007. Optimization of geometrically non-linear elastic-plastic structures in the state prior to plastic collapse, *Journal of Civil Engineering and Management* 13(3): 183–192.
- STR 2.05.08:2005. Plieninių konstrukcijų projektavimas. Vilnius, 2005.

CALCULATION OF ELASTIC-PLASTIC GEOMETRICALLY NONLINEAR FRAMES

L. Liepa, R. Karkauskas

Abstract

The article discusses an algorithm for optimizing and analyzing steel inelastic frame structures evaluating geometrical nonlinearity. The structure is discretized applying bar type finite elements that can be tensioned, compressed or bended. For such elements, the tangent stiffness matrix, using MatLab symbolic calculations, has been developed. A numerical experiment on the steel frame structure has been performed. The elastic response of frame which elements geometry has changed is calculated using Newton-Raphson iterative load control method. The optimal volume of the structure prior to plastic collapse has been obtained. According to load factor, the sequence of the appearance of plastic hinges has been completed.

Keywords: optimization, analysis, geometrical nonlinearity, plastic hinge, Newton-Raphson.